

Exámenes de Selectividad

Matemáticas II. Cataluña 2018, Convocatoria
extraordinaria

mentoor.es



Sèrie 3

Ejercicio 1. Análisis

Considere la función polinómica $f(x) = x^3 - ax^2 + bx + c$.

- Calcule los valores de los parámetros a , b y c , sabiendo que la función tiene un extrem relativo en el punto de abscisa $x = 1$ y que la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 0$ es la recta $y = x + 3$.
- Para los valores $a = 2, b = 1$ y $c = 3$, calcule las abscisas de los extremos relativos de la función y clasifíquelos.

Solución:

- Calcule los valores de los parámetros a , b y c , sabiendo que la función tiene un extrem relativo en el punto de abscisa $x = 1$ y que la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 0$ es la recta $y = x + 3$.

Las condiciones del enunciado nos dan un sistema de tres ecuaciones.

La derivada de la función es $f'(x) = 3x^2 - 2ax + b$.

- Extremo relativo en $x=1$:** $f'(1) = 0$.

$$3(1)^2 - 2a(1) + b = 0 \implies 3 - 2a + b = 0.$$

- Recta tangente en $x=0$ es $y=x+3$:**

- La pendiente de la tangente es 1, por tanto $f'(0) = 1$.

$$3(0)^2 - 2a(0) + b = 1 \implies b = 1.$$

- El punto de tangencia está en la curva, por tanto $f(0) = y(0)$.

$$f(0) = 0 - 0 + 0 + c = c. \quad y(0) = 0 + 3 = 3. \implies c = 3.$$

Sustituyendo $b = 1$ en la primera ecuación: $3 - 2a + 1 = 0 \implies 4 - 2a = 0 \implies a = 2$.

Los valores son $a = 2, b = 1, c = 3$.

- Para los valores $a = 2, b = 1$ y $c = 3$, calcule las abscisas de los extremos relativos de la función y clasifíquelos.

La función es $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3$. Su derivada es $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$.

$$f'(x) = 0 \implies 3x^2 - 4x + 1 = 0 \implies x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6}.$$

Las abscisas de los extremos son $x_1 = 1$ y $x_2 = 1/3$.

Para clasificarlos, usamos la segunda derivada: $f''(x) = 6x - 4$.

- $f''(1) = 6(1) - 4 = 2 > 0 \implies$ Mínimo relativo en $x = 1$.
- $f''(1/3) = 6(1/3) - 4 = 2 - 4 = -2 < 0 \implies$ Máximo relativo en $x = 1/3$.

Hay un máximo relativo en $x = 1/3$ y un mínimo relativo en $x = 1$.

Ejercicio 2. Álgebra

Considere el sistema de ecuaciones lineales siguiente, que depende del parámetro real a :

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y - z = 1 \\ 2x + ay = 2a \end{cases}$$

- a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro a .
- b) Resuelva el sistema para el caso $a = 1$.

Solución:

- a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro a .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & a & 0 \end{pmatrix}.$$

$$|A| = a - 2 - (2a - 2) = -a.$$

$$|A| = 0 \iff a = 0.$$

Caso 1: $a \neq 0 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rg}(A) = 3$. **S.C.D.**

Caso 2: $a = 0$. $\text{Rg}(A) = 2$. $\text{Rg}(A^*) = 2$. **S.C.I.**

$$\begin{array}{ll} \text{Si } a \neq 0 \implies \text{S.C.D.} \\ \text{Si } a = 0 \implies \text{S.C.I.} \end{array}$$

- b) Resuelva el sistema para el caso $a = 1$.

Para $a = 1$, es S.C.D. $|A| = -1$.

Sumando las dos primeras ecuaciones: $2x + 2y = 4 \implies x + y = 2$.

De la tercera ecuación: $2x + y = 2$.

Restando estas dos nuevas ecuaciones: $-x = 0 \implies x = 0$.

Si $x = 0$, entonces $y = 2$.

Sustituyendo en la primera original: $0 + 2 + z = 3 \implies z = 1$.

La solución es $(0, 2, 1)$.

Ejercicio 3. Geometría

Considere el plano que tiene como vectores directores $\vec{u} = (-1, 3, 2)$ y $\vec{v} = (2, 1, 0)$ y que pasa por el punto $A = (1, 0, 3)$.

- Calcule la ecuación de la recta que es perpendicular al plano y pasa por el punto A.
- Calcule la distancia del punto $P = (1, 5, 0)$ al plano.

Solución:

- Calcule la ecuación de la recta que es perpendicular al plano y pasa por el punto A.

El vector director de la recta, $\vec{v}_r$, es el vector normal del plano, $\vec{n}_\pi = \vec{u} \times \vec{v}$.

$$\vec{n}_\pi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2, 4, -7).$$

La recta pasa por $A(1,0,3)$ y tiene $\vec{v}_r = (-2, 4, -7)$.

La recta es $(x, y, z) = (1, 0, 3) + \lambda(-2, 4, -7)$.

- Calcule la distancia del punto $P = (1, 5, 0)$ al plano.

Primero, hallamos la ecuación del plano: $-2(x-1) + 4(y-0) - 7(z-3) = 0 \implies -2x + 4y - 7z + 23 = 0$.

Aplicamos la fórmula de la distancia:

$$d(P, \pi) = \frac{|-2(1) + 4(5) - 7(0) + 23|}{\sqrt{(-2)^2 + 4^2 + (-7)^2}} = \frac{|-2 + 20 + 23|}{\sqrt{4 + 16 + 49}} = \frac{41}{\sqrt{69}} = \frac{41\sqrt{69}}{69}.$$

La distancia es $\frac{41\sqrt{69}}{69}$ unidades.

Ejercicio 4. Álgebra

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, en que α es un parámetro real.

- ¿Hay algún valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que A no tenga inversa para este valor?
- Calcule la matriz inversa de A^2 para $\alpha = 0$.

Solución:

- ¿Hay algún valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que A no tenga inversa para este valor?

Una matriz A no tiene inversa si y solo si su determinante es cero.

Calculamos el determinante de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Desarrollamos por la segunda columna:

$$|A| = -(-1) \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & -1 \end{vmatrix} = 1(-1 - \alpha^2) = -1 - \alpha^2.$$

Igualamos el determinante a cero para ver si existe algún valor de α que lo anule:

$$-1 - \alpha^2 = 0 \implies \alpha^2 = -1.$$

Esta ecuación no tiene solución en el conjunto de los números reales.

Por lo tanto, el determinante de A nunca es cero.

No existe ningún valor de α para el que A no tenga inversa, ya que $|A| \neq 0$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Calcule la matriz inversa de A^2 para $\alpha = 0$.

Para $\alpha = 0$, la matriz es $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculamos A^2 :

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Para encontrar $(A^2)^{-1}$, podemos usar la propiedad $(M^n)^{-1} = (M^{-1})^n$. Primero calculamos A^{-1} y luego la elevamos al cuadrado.



Para $\alpha = 0$, $|A| = -1$.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A)^t = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t = -1 \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora calculamos $(A^{-1})^2$:

$$(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 5. Geometría

Considere los puntos del espacio tridimensional $A = (1, 1, 0)$, $B = (3, 5, 0)$ y $C = (1, 0, 0)$ y la recta $r : x = y - 1 = \frac{z}{2}$.

- Encuentre el punto de intersección de la recta r con el plano que pasa por los puntos A , B y C .
- Encuentre los puntos P de la recta r para los cuales el tetraedro de vértices P , A , B y C tiene un volumen de $2u^3$.

Solución:

- Encuentre el punto de intersección de la recta r con el plano que pasa por los puntos A , B y C .

Los tres puntos A , B y C tienen la tercera coordenada $z = 0$, por lo que el plano que los contiene es el plano OXY , de ecuación $\pi : z = 0$.

La recta r en forma paramétrica es: $r \equiv (x, y, z) = (0, 1, 0) + \lambda(1, 1, 2)$.

Para encontrar la intersección, sustituimos la ecuación de la recta en la del plano:

$$2\lambda = 0 \implies \lambda = 0.$$

Sustituyendo $\lambda = 0$ en la recta, obtenemos el punto $(0, 1, 0)$.

El punto de intersección es $(0, 1, 0)$.

- Encuentre los puntos P de la recta r para los cuales el tetraedro de vértices P , A , B y C tiene un volumen de $2u^3$.

Un punto genérico de r es $P(\lambda, 1 + \lambda, 2\lambda)$.

$$\text{Volumen} = \frac{1}{6} |[\vec{AP}, \vec{AB}, \vec{AC}]| = 2 \implies |[\vec{AP}, \vec{AB}, \vec{AC}]| = 12.$$

$$\vec{AP} = (\lambda - 1, \lambda, 2\lambda), \vec{AB} = (2, 4, 0), \vec{AC} = (0, -1, 0).$$

$$[\vec{AP}, \vec{AB}, \vec{AC}] = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & \lambda & 2\lambda \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2\lambda(-2) = -4\lambda.$$

$$|-4\lambda| = 12 \implies 4|\lambda| = 12 \implies |\lambda| = 3 \implies \lambda = \pm 3.$$

Para $\lambda = 3$, el punto es $P_1(3, 4, 6)$. Para $\lambda = -3$, el punto es $P_2(-3, -2, -6)$.

Los puntos son $(3, 4, 6)$ y $(-3, -2, -6)$.



Ejercicio 6. Análisis

Sean las funciones $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 3 - x^2$.

- Haga un esbozo de las gráficas de las parábolas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ en un mismo sistema de ejes cartesianos y encuentre los puntos de corte con el eje de las abscisas, los vértices y los puntos de corte entre las dos gráficas.
- Calcule el área de la región del semiplano $y \geq 0$ compresa entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$.

Solución:

- Haga un esbozo de las gráficas de las parábolas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ en un mismo sistema de ejes cartesianos y encuentre los puntos de corte con el eje de las abscisas, los vértices y los puntos de corte entre las dos gráficas.

$f(x) = x^2 - 1$: Parábola convexa (hacia arriba), Vértice en $(0, -1)$, Cortes con OX en $x = \pm 1$.

vspace10pt

$g(x) = 3 - x^2$: Parábola cóncava (hacia abajo), Vértice en $(0, 3)$, Cortes con OX en $x = \pm\sqrt{3}$.

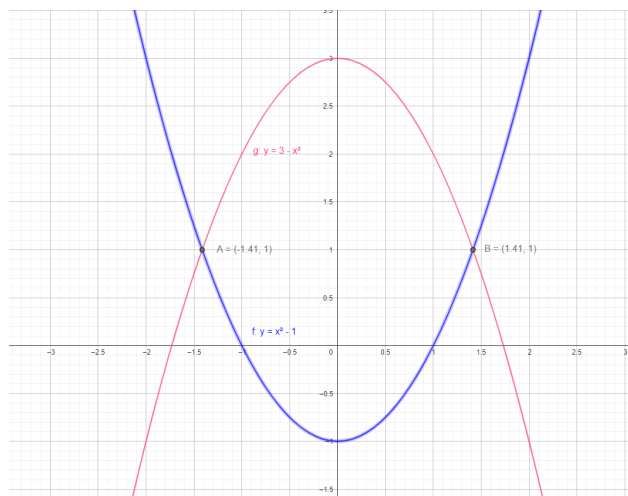
vspace10pt

Cortes entre f y g: $x^2 - 1 = 3 - x^2 \implies 2x^2 = 4 \implies x^2 = 2 \implies x = \pm\sqrt{2}$.

vspace10pt

Puntos de corte: $(\sqrt{2}, 1)$ y $(-\sqrt{2}, 1)$.

Cortes OX de f: $(\pm 1, 0)$. Vértice f: $(0, -1)$.
 Cortes OX de g: $(\pm\sqrt{3}, 0)$. Vértice g: $(0, 3)$.
 Cortes f-g: $(\pm\sqrt{2}, 1)$.



- Calcule el área de la región del semiplano $y \geq 0$ compresa entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$.

La región está limitada superiormente por $g(x)$ e inferiormente por $f(x)$ y el eje $y = 0$. El área es la que está bajo $g(x)$ entre sus raíces $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$, menos los dos trozos de área bajo $f(x)$ que están en el semiplano $y \geq 0$. Por simetría, podemos calcular el área para $x \geq 0$ y multiplicar por 2.

Área en el primer cuadrante: $A_1 = \int_0^{\sqrt{3}} g(x)dx - \int_1^{\sqrt{2}} f(x)dx$. $A_{total} = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (3-x^2)dx - 2 \int_1^{\sqrt{2}} (x^2-1)dx$.

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (3-x^2)dx = \left[3x - \frac{x^3}{3}\right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = (3\sqrt{3} - \sqrt{3}) - (-3\sqrt{3} + \sqrt{3}) = 4\sqrt{3}.$$

$$2 \int_1^{\sqrt{2}} (x^2-1)dx = 2\left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^{\sqrt{2}} = 2\left[\left(\frac{2\sqrt{2}}{3} - \sqrt{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right)\right] = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3}\right) = \frac{4-2\sqrt{2}}{3}.$$

$$A_{total} = 4\sqrt{3} - \frac{4-2\sqrt{2}}{3} = \frac{12\sqrt{3}-4+2\sqrt{2}}{3}.$$

El área es $\frac{12\sqrt{3}-4+2\sqrt{2}}{3}$ u².
